

Вопрос 11. зр. 101.
Вариант 2
(1.2)

$$\max_{ij} |a_{ij}| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1}$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_i |(Ax)_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n x_j a_{ij}$$

$$|(Ax)_i| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| |a_{ij}|$$

1	2	3	4	5	6	Σ
4	4	0	0	4	0	3

$$\max_i |(Ax)_i| \leq \max_i \left(\max_j |a_{ij}| \|x\|_1 \right) = \|x\|_1 \max_{i,j} |a_{ij}|$$

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1} \leq \frac{\|x\|_1 \max_{i,j} |a_{ij}|}{\|x\|_1} = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

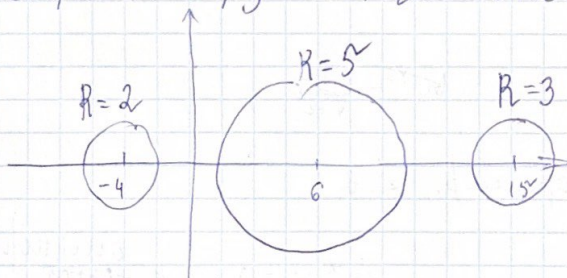
Равенство достигается ~~на~~ на векторе
 $(0 \dots 0 \pm 1 0 \dots 0)^T$, где 1 стоит на j -м месте

(2)

Найти индекс инерции

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{— матрица с диаг. преобл.}$$

Построим круги Гельмгольца



2 положительных э.з.

1 отриц. э.з.

$$\pi_- = 1$$

$$\pi_+ = 2$$

Круги не пересекаются $\Rightarrow$
 в каждом по 1 э.з.

$$AA^* = A^*A$$

3-мя: $A(AA^*) = |A(A)|^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix} \quad m \times n$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & & 2 \\ 3 & 3 & & 3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & & n \end{bmatrix} \quad n \times m$$

сим. $(b_1, \dots, b_n)$

$$A = V \Sigma U$$

↑ ↑
унит. унит.

$$A^* A = B, \text{ где } b_{ij} = \sum_{i=1}^m i^2$$

обозначим $b_{ij} = s$

$$A A^*$$

$$A A^* = \begin{bmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \dots & s \end{bmatrix} \quad m \times m$$

$$A A^* = s u u^T, \text{ где } u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \text{собст. в-р.}$$

$$A A^* u = s (u u^T) u = m s u$$

$$\lambda = \frac{m}{\sqrt{ms}} - \text{собст. знач.} \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{ms}$$

$\text{rank } A = 1 \Rightarrow$ синг. число одно, ост. числа = 0.

$$\Sigma = \sqrt{ms}$$

$$A = V \Sigma U^*$$

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \text{нормир. в.в.}$$

$$A U = V \Sigma U^* U = V \Sigma, \text{ где } U^* U = 1, \text{ т.к. орт. н/нормир. в.в.}$$

$$V = \frac{A U}{\Sigma} = \frac{1}{m \sqrt{s}} \cdot A \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{m \sqrt{s}} \begin{bmatrix} m \\ 2m \\ \vdots \\ nm \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{s}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

Синг. разложение:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{s}} & 2\sqrt{\frac{1}{s}} & 3\sqrt{\frac{1}{s}} & \dots & n\sqrt{\frac{1}{s}} \\ \sqrt{\frac{1}{s}} & 2\sqrt{\frac{1}{s}} & 3\sqrt{\frac{1}{s}} & \dots & n\sqrt{\frac{1}{s}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{s}} & 2\sqrt{\frac{1}{s}} & 3\sqrt{\frac{1}{s}} & \dots & n\sqrt{\frac{1}{s}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{s}} \end{bmatrix} \sqrt{ms} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$

ответ:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} \end{array} \right)$$

$$\lambda_1: n = \text{def } B^{k-1} + 2 \text{ def } B^k + \text{def } B^{k+1}$$

алл.
кратность = 4

$$B = (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

~~rank B = 3~~ $\Rightarrow$
rank B = 3 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{def } B = 2$

$$\text{rank } B^2 = 1 \Rightarrow \text{def } B^2 = 4$$

~~rank B = 2 on def 4~~ 2 клетки.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)^2 - (2-\lambda) \dots \quad \begin{matrix} \text{ХЗ что} \\ \text{... -тут} \end{matrix}$$

$$= -2 - 9\lambda + 16\lambda^2 - 14\lambda^3$$

$$= 2 - 9\lambda + 16\lambda^2 - 14\lambda^3 + 6\lambda^4 - \lambda^5$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$